ΕΡΓΑΣΙΑ 3
ΟΡΜΗ-ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΤΗΣ ΟΡΜΗΣ

Παρατηρήσεις-Υποδείξεις

● Μετωπική λέγεται η κρούση κατά την οποία τα διανύσματα των ταχυτήτων πριν την κρούση των σωμάτων που συγκρούονται βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Λόγω διατήρησης της ορμής και μετά την κρούση τα διανύσματα των ταχυτήτων θα βρίσκονται στην ίδια ευθεία.
● Ελαστική λέγεται η κρούση κατά την οποία δεν έχουμε απώλειες ενέργειας. Άρα σε μια τέτοια κρούση εκτός από τη συνολική ορμή διατηρείται σταθερή και η συνολική κινητική ενέργεια του συστήματος. Μια πλαστική κρούση ποτέ δεν είναι ελαστική.
● Όταν σε μια άσκηση έχουμε μετωπική κρούση δηλαδή όλες οι ταχύτητες είναι στην ίδια ευθεία, τότε μετατρέπουμε τη διανυσματική σχέση που προκύπτει απ' τη διατήρηση της ορμής σε αλγεβρική βγάζοντας απλώς τα διανύσματα, διαλέγουμε μια θετική φορά και δουλεύουμε με αλγεβρικές τιμές όπως γνωρίζουμε και από προηγούμενα κεφάλαια.
● Αν η κρούση δεν είναι μετωπική τότε μετά από τη διανυσματική σχέση κάνουμε σχήμα με βάση τον κανόνα του παραλληλογράμμου και με βάση αυτό βρίσκουμε σχέση με μέτρα.
● Η αρχή διατήρησης της ορμής ισχύει σε κάθε κρούση και έκρηξη ακόμα και αν το σύστημα δεν είναι μονωμένο. Πρέπει να προσέχουμε όμως να την εφαρμόζουμε λίγο πριν και λίγο μετά την κρούση ή την έκρηξη.
● Όταν σε μια άσκηση έχουμε μετωπική και ελαστική κρούση, παίρνουμε τις αρχές διατήρησης της ορμής και κινητικής ενέργειας. Έτσι προκύπτει ένα σύστημα δύο εξισώσεων. Αυτό το σύστημα είναι λίγο δύσκολο να επιλυθεί επειδή η μια εξίσωση είναι δευτέρου βαθμού. Ο πιο εύκολος τρόπος είναι να «μαζέψουμε» στο πρώτο μέλος κάθε εξίσωσης τους όρους που έχουν τη μάζα m_1 και στο δεύτερο μέλος τους όρους που έχουν τη μάζα m_2. Μετά να διαιρέσουμε τις δύο σχέσεις που προκύπτουν κατά μέλη και τότε προκύπτει μια σχέση πρώτου βαθμού την οποία παίρνουμε σαν σύστημα με την αρχική σχέση πρώτου βαθμού που είχαμε (η οποία είχε προκύψει από την αρχή διατήρησης της ορμής).

Ασκήσεις

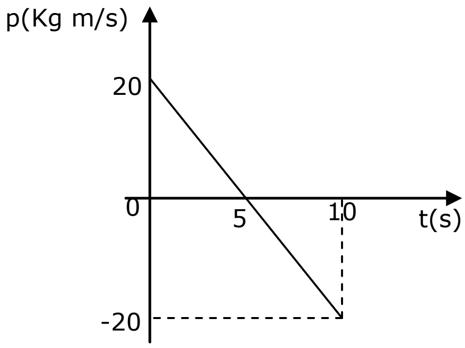
1. Σώμα που κινείται ευθύγραμμα με σταθερή ορμή μέτρου $|p_o|=10$ Kg m/s με διεύθυνση οριζόντια και φορά προς τα δεξιά, δέχεται τη χρονική στιγμή $t_o=0$ σταθερή δύναμη μέτρου $|F|=20N$ ίδιας κατεύθυνσης με την ορμή p_o.

α. Να βρείτε το (στιγμιαίο) ρυθμό μεταβολής της ορμής του σώματος $\frac{dp}{dt}$ τις χρονικές στιγμές $t_o=0$ και $t_1=5s$.
β. Να βρείτε το μέσο ρυθμό μεταβολής της ορμής του σώματος για το χρονικό διάστημα από $t_o=0$ έως $t_1=5s$.
γ. Να βρείτε την ορμή του σώματος τη χρονική στιγμή $t_1=5s$.

2. Σώμα που κινείται ευθύγραμμα με σταθερή ορμή μέτρου $|p_o|=10$ Kg m/s με διεύθυνση οριζόντια και φορά προς τα δεξιά, δέχεται τη χρονική στιγμή $t_o=0$ δύναμη που το μέτρο της μεταβάλλεται με το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση $|F|=10t+5$ (SI) και η κατεύθυνση της είναι ίδια με την ορμή p_o. Αν δίνεται ότι η ορμή του σώματος τη χρονική στιγμή $t_1=5s$ έχει μέτρο $|p_o|=160$ Kg m/s :

α. Να βρείτε το (στιγμιαίο) ρυθμό μεταβολής της ορμής του σώματος $\frac{dp}{dt}$ τις χρονικές στιγμές $t_o=0$ και $t_1=5s$.
β. Να βρείτε το μέσο ρυθμό μεταβολής της ορμής του σώματος για το χρονικό διάστημα από $t_o=0$ έως $t_1=5s$. Τι εκφράζει αυτό το αποτέλεσμα;

3. Η αλγεβρική τιμή της ορμής ενός σώματος το οποίο κινείται ευθύγραμμα σε οριζόντια διεύθυνση απεικονίζεται στην παρακάτω γραφική παράσταση (θετική φορά έχει θεωρηθεί προς τα δεξιά) :



α. Να περιγράψετε την κίνηση του σώματος από τη χρονική στιγμή $t_o=0$ έως τη χρονική στιγμή $t_1=10s$.
β. Να βρείτε τη συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα σε μέτρο και κατεύθυνση (δηλαδή την αλγεβρική τιμή της).
γ. Να βρείτε αν η αλγεβρική τιμή της ορμής μεταβάλλεται με τον ίδιο ρυθμό από 0 έως 5s και από 5s έως 10s.
δ. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της ορμής τη στιγμή που η ταχύτητα του σώματος μηδενίζεται.

4. Μπαλάκι μάζας m=50g, πέφτει σε τοίχο με ταχύτητα $|υ|=5m/s$ και αναπηδά με ταχύτητα ίδιου μέτρου. Αν η επαφή με τον τοίχο διαρκεί χρόνο $Δt=0,1s$, να βρεθεί η δύναμη που δέχεται το μπαλάκι από τον τοίχο αν αυτή θεωρηθεί σταθερή.

(5N)

5. Σύστημα σωμάτων αποτελείται από σώμα μάζας $m_1=2Kg$ που κινείται με ταχύτητα $|υ_1|=5m/s$ προς τα δεξιά και σώμα μάζας $m_2=4Kg$ με ταχύτητα $|υ_2|=2m/s$ προς τα αριστερά. Να βρεθεί η ολική ορμή του συστήματος.

(2 Kg m/s προς τα δεξιά)

6. Σύστημα σωμάτων αποτελείται από σώμα ορμής $|p_1|=8$ Kg m/s και σώμα μάζας $m_2=2Kg$ με ταχύτητα $|υ_2|=3m/s$. Αν το σώμα 1 κινείται βόρεια και το σώμα 2 ανατολικά, να βρεθεί η ολική ορμή του συστήματος.

(10 Kg m/s, εφφ=4/3)

7. Τρία σώματα με μάζες $m_1=2Kg$, $m_2=1Kg$ και m_3 βρίσκονται στην ίδια ευθεία με το m_1 να είναι ενδιάμεσα απ' τα άλλα δύο σώματα. Σύστημα σωμάτων αποτελείται από τα σώματα m_1 και m_2 που έχουν ταχύτητες αντίστοιχα $υ_1=5m/s$ προς τα δεξιά και $υ_2=8m/s$ προς τα αριστερά.
α. Να βρεθεί η ολική ορμή του συστήματος.
β. Αν το m_1 ασκήσει στο m_2 σταθερή δύναμη μέτρου $F_α=3N$ προς τα αριστερά και το m_3 ασκήσει στο m_1 δύναμη $F_β=4N$ επίσης προς τα αριστερά για χρόνο $Δt=3s$, να βρείτε την ολική ορμή του συστήματος μετά από χρόνο $Δt$.

8. Βάρκα μάζας M=100Kg, βρίσκεται ακίνητη στο νερό. Άνθρωπος μάζας m=60Kg βρίσκεται επίσης ακίνητος στην άκρη της βάρκας. Αν ο άνθρωπος ξεκινήσει να πάει προς την άλλη άκρη με ταχύτητα $|υ_1|=5m/s$, να βρεθεί η ταχύτητα της βάρκας σε μέτρο και κατεύθυνση.

(3m/s αντίθετα από την κίνηση του ανθρώπου)

9. Όχημα το οποίο έχει πάνω ένα κανόνι, έχει μάζα M=490Kg (χωρίς το βλήμα). Το όχημα κινείται οριζόντια με ταχύτητα $|υ_1|=8m/s$ προς τα δεξιά και εκτοξεύει βλήμα μάζας m=10Kg οριζόντια προς τα δεξιά με ταχύτητα $|υ_2|=106m/s$. Να βρεθεί η ταχύτητα του οχήματος μετά την εκτόξευση του βλήματος σε μέτρο και κατεύθυνση.

(6m/s με κατεύθυνση προς τα δεξιά)

10. Σώμα μάζας m_1=2Kg κινείται οριζόντια προς τα δεξιά με ταχύτητα $|υ_1|$=5m/s. Σώμα μάζας m_2=4Kg κινείται στην ίδια ευθεία με το πρώτο αλλά με αντίθετη κατεύθυνση με ταχύτητα μέτρου $|υ_2|$=4m/s. Τα δυο σώματα συγκρούονται πλαστικά. Να βρεθούν :
α) η ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.
β) η μεταβολή της ορμής κάθε σώματος και του συστήματος κατά την κρούση.
γ) η μεταβολή της κινητικής ενέργειας κάθε σώματος και του συστήματος κατά την κρούση.

(1m/s με φορά προς τα αριστερά, -12Kg m/s, 12 Kg m/s, 0, -24J, -30J, -54J)

11. Σώμα μάζας m=2Kg που ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο, ξεκινά απ' την ηρεμία με σταθερή επιτάχυνση $|α|=2m/s^2$. Μετά από χρόνο 5s το σώμα συγκρούεται πλαστικά με άλλο ακίνητο σώμα μάζας M=8Kg. Να βρεθεί η ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.

(2m/s)

12. Σώμα μάζας m_1=6Kg κινείται προς τα δεξιά σε οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα $|υ_1|$=6m/s και συγκρούεται μετωπικά με σώμα μάζας m_2=2Kg που κινείται επίσης προς τα δεξιά με ταχύτητα $|υ_2|$=4m/s. Αν η κρούση είναι ελαστική να βρεθούν :
α) οι ταχύτητες των δύο σωμάτων $υ_1'$ και $υ_2'$ αμέσως μετά την σύγκρουση.
β) η μεταβολή της ορμής κάθε σώματος και του συστήματος κατά την κρούση.
γ) η μεταβολή της κινητικής ενέργειας κάθε σώματος και του συστήματος κατά την κρούση.

(5m/s, 7m/s και τα δύο προς τα δεξιά, -6 Kg m/s, 6 Kg m/s, 0, -33J, 33J, 0)

13. Σώμα μάζας 3m, κινείται οριζόντια με ταχύτητα $|υ_1|$=10m/s προς τα δεξιά, οπότε συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με άλλο σώμα μάζας m που είναι αρχικά ακίνητο. Να βρεθούν οι ταχύτητες $υ_1'$ και $υ_2'$ των δυο σωμάτων μετά την κρούση.

(5m/s, 15m/s και οι δύο προς τα δεξιά)

14. Σώμα μικρών διαστάσεων μάζας m=5Kg κινείται οριζόντια σε λείο επίπεδο με ταχύτητα μέτρου $|υ|$=100m/s. Το σώμα συγκρούεται με άλλο σώμα μάζας M=15Kg το οποίο είναι αρχικά ακίνητο και το διαπερνά. Αν η ταχύτητα του σώματος μάζας m όταν βγει από το άλλο σώμα έχει μέτρο $|υ'|$=40m/s να βρεθεί πόσο θα απέχουν τα σώματα μετά από χρόνο Δt =5s από τη στιγμή της σύγκρουσης.

(100m)

15. Σώμα μικρών διαστάσεων μάζας m=2Kg κινείται οριζόντια με ταχύτητα μέτρου $|υ|$. Το σώμα συγκρούεται πλαστικά με άλλο σώμα μάζας M=8Kg το οποίο είναι αρχικά ακίνητο και το συσσωμάτωμα σταματά αφού κινηθεί οριζόντια απόσταση 40m. Αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης είναι μ=0,5 να βρεθεί η το $|υ|$.

(100m/s)

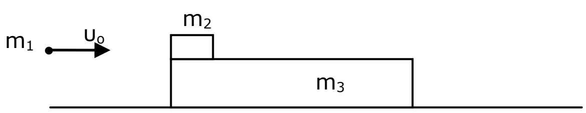
16. Σώμα μάζας m_1=m τη χρονική στιγμή t_o=0 κινείται προς τα δεξιά με ταχύτητα $|υ_1|$=26 m/s με σταθερή επιτάχυνση μέτρου $|α_1|=5m/s^2$ και φοράς προς τα αριστερά. Την ίδια στιγμή (t_o=0), σώμα μάζας m_2=4m κινείται προς τα αριστερά με ταχύτητα $|υ_2|$=14m/s με σταθερή επιτάχυνση μέτρου $|α_2|=3m/s^2$ και φοράς προς τα αριστερά. Αν τα δύο σώματα συγκρουστούν πλαστικά τη χρονική στιγμή t_1=5s, να βρεθεί η ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.

(23m/s)

17.Σώμα μάζας m=10Kg, κινείται οριζόντια με ταχύτητα μέτρου $|υ|$. Κάποια στιγμή γίνεται έκρηξη και το σώμα χωρίζεται σε δυο κομμάτια με μάζες m_1=4Kg και m_2=6Kg τα οποία κινούνται με ταχύτητες κάθετες μεταξύ τους με μέτρα $|υ_1|$=2m/s και $|υ_2|$=1m/s αντίστοιχα. Να γίνει σχήμα και να βρεθεί το $|υ|$.

(1m/s)

18. Δίνονται τα σώματα του παρακάτω σχήματος :



όπου m_1=50 g, m_2=950 g, m_3=4 Kg και $υ_o$=100 m/s.

Επίσης δίνεται ότι το έδαφος είναι λείο, ενώ ανάμεσα στα σώματα m_2, m_3 υπάρχει τριβή. Τη χρονική στιγμή t_o=0 γίνεται πλαστική κρούση του σώματος m_1 με το m_2 και αμέσως μετά το συσσωμάτωμα των m_1, m_2 κινείται πάνω στο m_3 με επιβραδυνόμενη κίνηση λόγω της τριβής. Λόγω της ίδιας αιτίας αμέσως μετά την κρούση, το σώμα m_3 αρχίζει να κινείται προς τα δεξιά με επιταχυνόμενη κίνηση ,μέχρι τη στιγμή t_1=0,8 s οπότε όλα τα σώματα αποκτούν κοινή ταχύτητα V και το συσσωμάτωμα σταματά να γλιστρά πάνω στο m_3. Να βρείτε :

α. Την ταχύτητα υ του συσσωματώματος m_1, m_2 αμέσως μετά την κρούση.

β. Την ολική ορμή του συστήματος m_1, m_2, m_3 λίγο πριν την κρούση, αμέσως μετά την κρούση και τη χρονική στιγμή t_1=0,8 s.

γ. Την ταχύτητα V.

δ. Την τριβή που ασκείται στο m_3 και στο συσσωμάτωμα σε μέτρο και κατεύθυνση.

ε. Τη θερμότητα που μεταφέρθηκε στο περιβάλλον λόγω της κρούσης και λόγω των τριβών (ξεχωριστά).

στ. Την επιτάχυνση που αποκτά το συσσωμάτωμα και το σώμα m_3 αμέσως μετά την κρούση.

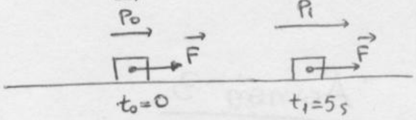
ζ. Το διάστημα που θα διανύσει το συσσωμάτωμα και το m_3 ως προς παρατηρητή που βρίσκεται στο έδαφος και το διάστημα που θα διανύσει το συσσωμάτωμα πάνω στο m_3.

η. Το συνολικό έργο των τριβών ως προς παρατηρητή που βρίσκεται στο έδαφος και ως προς παρατηρητή που βρίσκεται πάνω στο m_3.

<u>Από το σχολικό βιβλίο</u> : Όλες οι ερωτήσεις και οι ασκήσεις.

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1



α. $\left.\dfrac{dP}{dt}\right|_{t=0} = \Sigma F\big|_{t=0} = F\big|_{t=0} = 20\, \dfrac{kg\, m/s}{s}$

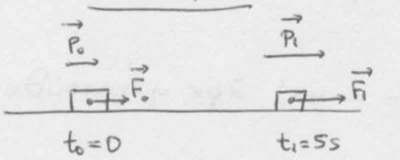
$\left.\dfrac{dP}{dt}\right|_{t=5s} = \Sigma F\big|_{t=5s} = F\big|_{t=5s} = 20\, \dfrac{kg\, m/s}{s}$

β. Επειδή $\dfrac{dP}{dt} = \Sigma F = $ σταθερό, ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής της ορμής είναι ίσος με το μέσο ρυθμό για οποιοδήποτε χρονικό διάστημα. Δηλαδή $\dfrac{dP}{dt} = \dfrac{\Delta P}{\Delta t} = 20\, \dfrac{kg\, m/s}{s}$.

γ. Παίρνω το μέσο ρυθμό μεταβολής της ορμής για το χρονικό διάστημα από $t_0=0$ έως $t_1=5s$.

Είναι $\dfrac{\Delta P}{\Delta t} = \dfrac{P_1 - P_0}{t_1 - t_0} \xrightarrow{(1)} \dfrac{P_1 - 10}{5-0} = 20 \rightarrow P_1 - 10 = 100 \rightarrow P_1 = 110\ kg\, m/s$.

Άσκηση 2

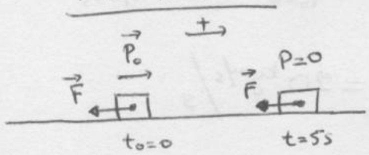


α. Εδώ σε αντίθεση με την προηγούμενη άσκηση επειδή η $\Sigma F = F$ δεν είναι σταθερή, άρα ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής της ορμής αλλάζει από στιγμή σε στιγμή. Είναι:

$\left.\dfrac{dP}{dt}\right|_{t_0=0} = \Sigma F\big|_{t=0} = F\big|_{t=0} = 5\ \dfrac{kg\, m/s}{s}$, $\left.\dfrac{dP}{dt}\right|_{t_1=5s} = \Sigma F\big|_{t_1=5s} = F\big|_{t_1=5s} = 55\ \dfrac{kg\, m/s}{s}$

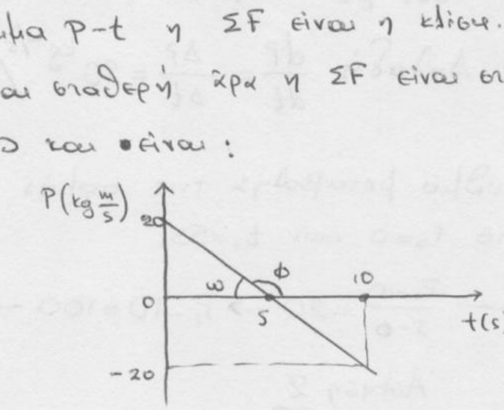
β. $\dfrac{\Delta P}{\Delta t} = \dfrac{P_1 - P_0}{t_1 - t_0} = \dfrac{160-10}{5-0} = \dfrac{150}{5} = 30\ \dfrac{kg\, m/s}{s}$. Αυτό το αποτέλεσμα εκφράζει τον (υποθετικό) σταθερό ρυθμό με τον οποίο θα έπρεπε να αλλάξει η ορμή για να μεταβληθεί από $P_0 = 10\,kg\frac{m}{s}$ σε $P_1 = 160\,kg\frac{m}{s}$ σε χρόνο 5s.

Άσκηση 3



α. Για τις χρονικές στιγμές που η ορμή του σώματος έχει θετικές τιμές, το σώμα κινείται προς τα δεξιά αλλιώς κινείται προς τα αριστερά. Άρα από $t=0$ έως $t=5s$ το σώμα κινείται προς τα δεξιά, τη χρονική στιγμή $t=5s$ σταματά στιγμιαία και από την $t=5s$ και μετά γυρίζει και κινείται προς τα αριστερά.

β. Σε διάγραμμα $P-t$ η ΣF είναι η κλίση. Αφού εδώ έχουμε ευθεία η κλίση είναι σταθερή άρα η ΣF είναι σταθερή σε όλη τη διάρκεια της κίνησης και είναι:

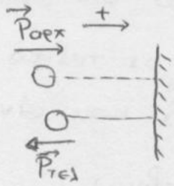


$\Sigma F = \epsilon\varphi\phi = -\epsilon\varphi\omega = -\frac{20}{5} = -4N$ άρα η κατεύθυνση της $\Sigma\vec{F}$ είναι προς τα αριστερά

γ. $\frac{dP}{dt} = \Sigma F = σταθ.$ άρα η ορμή μεταβάλλεται με τον ίδιο ρυθμό όλες τις χρονικές στιγμές $\frac{dP}{dt} = -4\,kg\frac{m}{s}/s$.

δ. Όπως σε όλες τις υπόλοιπες χρονικές στιγμές έτσι και την $t=5s$ θα είναι $\frac{dP}{dt} = -4\,kg\frac{m}{s}/s$.

Άσκηση 4



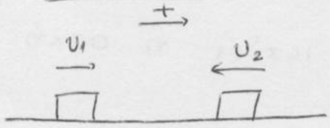
Είναι $P_{αρχ} = mV_0 = 0{,}05 \cdot 5 = 0{,}25\ kg\frac{m}{s}$

$P_{τελ} = mU_1 = 0{,}05(-5) = -0{,}25\ kg\frac{m}{s}$

Άρα $F = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{P_{τελ} - P_{αρχ}}{\Delta t} = \frac{-0{,}25 - 0{,}25}{0{,}1} = -5N$

Άρα η κατεύθυνση της $\vec{F}$ είναι προς τα αριστερά.

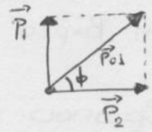
Άσκηση 5



$\vec{P}_{ολ} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 \longrightarrow P_{ολ} = P_1 + P_2$ αφού τα διανύσματα είναι συγγραμμικά.

Άρα $P_{ολ} = 10 - 8 = 2\ kg\ m/s$. Άρα $|\vec{P}_{ολ}| = 2\ kg\ m/s$ και η φορά προς τα δεξιά αφού $P_{ολ} > 0$.

Άσκηση 6



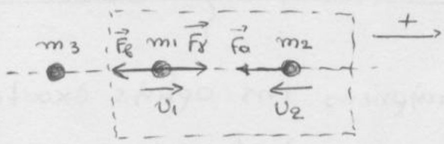
$\vec{P}_{ολ} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 \longrightarrow$

$|\vec{P}_{ολ}| = \sqrt{|\vec{P}_1|^2 + |\vec{P}_2|^2} \longrightarrow$

$|\vec{P}_{ολ}| = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10\ kg\ m/s$

$εφφ = \frac{|\vec{P}_1|}{|\vec{P}_2|} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

Άσκηση 7



α. $\vec{P}_{ολ(αρχ)} = \vec{P}_{1(αρχ)} + \vec{P}_{2(αρχ)} \longrightarrow P_{ολ(αρχ)} = P_{1(αρχ)} + P_{2(αρχ)} = m_1 U_1 + m_2 U_2 = 10 - 8 = 2\ kg\ m/s$. Άρα έχει φορά προς τα δεξιά.

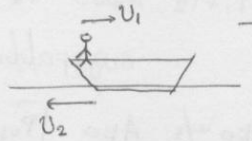
β. Έστω $\vec{F}_γ$ η αντίδραση της $\vec{F}_α$. Άρα όλες οι δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα του συστήματος, φαίνεται στο σχήμα. Για να υπολογίσουμε όμως την ολική ορμή του συστήματος τελικά, χρειαζόμαστε μόνο τις εξωτερικές δυνάμεις δηλαδή την $\vec{F_3}$ και είναι:

$$\frac{\Delta \vec{P}_{ολ}}{\Delta t} = \Sigma \vec{F}_{εξ} \longrightarrow \frac{\Delta P_{ολ}}{\Delta t} = F_3 \longrightarrow \frac{P_{ολ(τελ)} - P_{ολ(αρχ)}}{\Delta t} = F_3 \longrightarrow P_{ολ(τελ)} = P_{ολ(αρχ)} + F_3 \cdot \Delta t$$

$\longrightarrow P_{ολ(τελ)} = 2 - 4\cdot 3 = -10\ kg\,m/s$ (φορά προς τα αριστερά).

Βλέπουμε ότι $P_{ολ(αρχ)} \neq P_{ολ(τελ)}$. γιατί υπάρχουν εξωτερικές δυνάμεις και έτσι δεν ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής.

Άσκηση 8

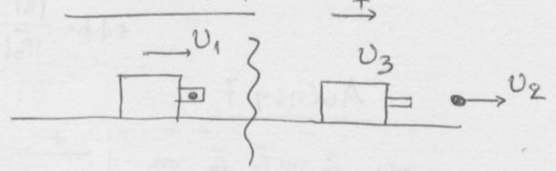


Αφού δεν υπάρχουν εξωτερικές δυνάμεις, ισχύει η ΑΔΟ:

$$P_{ολ(αρχ)} = P_{ολ(τελ)} \longrightarrow 0 = m_1 υ_1 + m_2 υ_2 \longrightarrow 0 = 60\cdot 5 + 100 υ_2$$

$\longrightarrow υ_2 = -3\ m/s$ άρα η βάρκα πηγαίνει αντίθετα απ' την κίνηση του ανθρώπου όπως ήταν αναμενόμενο.

Άσκηση 9

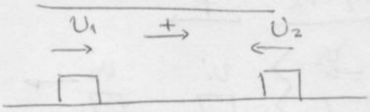


Από την αρχή διατήρησης της ορμής έχουμε:

$$P_{ολ(αρχ)} = P_{ολ(τελ)} \longrightarrow (M+m)υ_1 = Mυ_3 + mυ_2 \longrightarrow 500\cdot 8 = 490 υ_3 + 10\cdot 106$$

$$\longrightarrow 4000 = 490 υ_3 + 1060 \longrightarrow 490 υ_3 = 3340 \longrightarrow υ_3 = 6\ m/s$$

Άσκηση 10



α) ΑΔΟ: $P_{ολ(αρχ)} = P_{ολ(τελ)} \longrightarrow m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = (m_1+m_2)V \longrightarrow$

$2\cdot 5 - 4\cdot 4 = 6\cdot V \longrightarrow V = -1\ m/s$

β) $\Delta P_{ολ} = 0$ λόγω ΑΔΟ.

$\Delta P_1 = P_{1(τελ)} - P_{1(αρχ)} = m_1 V - m_1\upsilon_1 = 2(-1) - 2\cdot 5 = -12\ kg\,m/s$

$\Delta P_2 = P_{2(τελ)} - P_{2(αρχ)} = m_2 V - m_2\upsilon_2 = 4(-1) - 4(-4) = -4+16 = 12\ kg\,m/s$

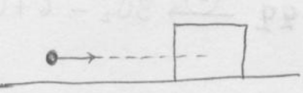
Λογικό. Σε κάθε κρούση πρέπει $\Delta P_1 + \Delta P_2 = 0$ λόγω ΑΔΟ.

γ) $\Delta K_1 = K_{1(τελ)} - K_{1(αρχ)} = \frac{1}{2}m_1V^2 - \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 = \frac{1}{2}m_1(V^2-\upsilon_1^2) = \frac{1}{2}\cdot 2(1-25) = -24\,J$

$\Delta K_2 = K_{2(τελ)} - K_{2(αρχ)} = \frac{1}{2}m_2V^2 - \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 = \frac{1}{2}m_2(V^2-\upsilon_2^2) = \frac{1}{2}\cdot 4(1-16) = -30\,J$

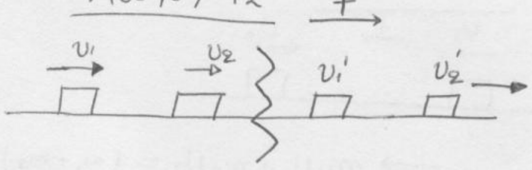
$\Delta K_{ολ} = Q = \Delta K_1 + \Delta K_2 = -54\,J$

Άσκηση 11



Όταν έχουμε κρούση ή έκρηξη ξέρουμε ότι πάντα μπορούμε να εφαρμόσουμε την ΑΔΟ. Όταν όμως υπάρχουν εξωτερικές δυνάμεις (όπως εδώ που στο σώμα m ασκείται η δύναμη που το επιταχύνει), πρέπει να εφαρμόζουμε την ΑΔΟ λίγο πριν και λίγο μετά την κρούση. Άρα πρώτα πρέπει να βρούμε την ταχύτητα του m λίγο πριν την κρούση έστω υ_1. Είναι $\upsilon_1 = a\Delta t = 2\cdot 5 = 10\,m/s$. Άρα από ΑΔΟ έχουμε $P_{ολ(αρχ)} = P_{ολ(τελ)} \longrightarrow m\upsilon_1 = (m+M)V \longrightarrow V = \frac{2\cdot 10}{10} = 2\ m/s.$

Άσκηση 12



α) ΑΔΟ $P_{ολ(αρχ)} = P_{ολ(τελ)} \longrightarrow m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = m_1\upsilon_1' + m_2\upsilon_2' \longrightarrow$

$$m_1(\upsilon_1 - \upsilon_1') = m_2(\upsilon_2' - \upsilon_2) \quad (1)$$

κρούση ελαστική άρα $K_{ολ(αρχ)} = K_{ολ(τελ)} \longrightarrow \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2$

$\longrightarrow m_1(\upsilon_1^2 - \upsilon_1'^2) = m_2(\upsilon_2'^2 - \upsilon_2^2) \longrightarrow m_1(\upsilon_1 - \upsilon_1')(\upsilon_1 + \upsilon_1') = m_2(\upsilon_2' - \upsilon_2)(\upsilon_2' + \upsilon_2) \quad (2)$

$\dfrac{(2)}{(1)} \longrightarrow \upsilon_1 + \upsilon_1' = \upsilon_2' + \upsilon_2 \quad (3)$

Λύνω το σύστημα των (1), (3): $\begin{cases} 6\cdot 6 + 2\cdot 4 = 6\upsilon_1' + 2\upsilon_2' \rightarrow 6\upsilon_1' + 2\upsilon_2' = 44 \\ 6 + \upsilon_1' = \upsilon_2' + 4 \rightarrow \upsilon_1' = \upsilon_2' - 2 \quad (4) \end{cases}$

$6\upsilon_1' + 2\upsilon_2' = 44 \rightarrow 3\upsilon_1' + \upsilon_2' = 22 \xrightarrow{(4)} 3\upsilon_2' - 6 + \upsilon_2' = 22 \rightarrow 4\upsilon_2' = 28 \rightarrow$

$\upsilon_2' = 7\,m/s \xrightarrow{(4)} \upsilon_1' = 5\,m/s$

β) $\Delta P_1 = P_1' - P_1 = m_1\upsilon_1' - m_1\upsilon_1 = m_1(\upsilon_1' - \upsilon_1) = 6(5-6) = -6\,kg\,m/s$

$\Delta P_2 = P_2' - P_2 = m_2\upsilon_2' - m_2\upsilon_2 = m_2(\upsilon_2' - \upsilon_2) = 2(7-4) = 6\,kg\,m/s$

γ) $\Delta K_1 = K_{1(τελ)} - K_{1(αρχ)} = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 - \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 = \frac{1}{2}m_1(\upsilon_1'^2 - \upsilon_1^2) = \frac{1}{2}\cdot 6(25-36) = -33\,J$

$\Delta K_2 = K_{2(τελ)} - K_{2(αρχ)} = \frac{1}{2}m_2(\upsilon_2'^2 - \upsilon_2^2) = \frac{1}{2}\cdot 2(49-16) = 33\,J$

$\Delta K_{ολ} = \Delta K_1 + \Delta K_2 = 0$ αφού η κρούση είναι ελαστική.

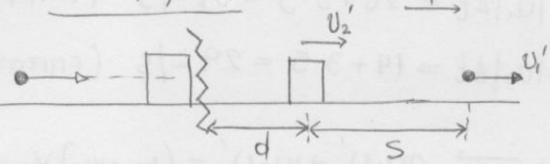
Άσκηση 13

Παίρνουμε τις σχέσεις (1) και (3) από την προηγούμενη άσκηση και έχουμε $\begin{cases} m_1 = 3m \\ m_2 = m \\ \upsilon_2 = 0 \end{cases}$ οπότε $\begin{cases} 3m\upsilon_1 = 3m\upsilon_1' + m\upsilon_2' \rightarrow 3\upsilon_1 = 3\upsilon_1' + \upsilon_2' \\ \upsilon_1 + \upsilon_1' = \upsilon_2' \end{cases}$

$\rightarrow 3\upsilon_1 = 3\upsilon_1' + \upsilon_1 + \upsilon_1' \longrightarrow 2\upsilon_1 = 4\upsilon_1' \rightarrow \upsilon_1' = \frac{1}{2}\upsilon_1 \rightarrow \upsilon_1' = 5\,m/s$

και $\upsilon_2' = 10 + 5 = 15\,m/s$.

Άσκηση 14



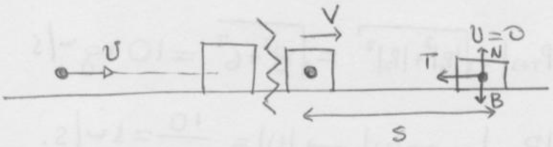
$$P_{ολ(αρχ)} = P_{ολ(τελ)} \longrightarrow mυ = mυ_1' + Mυ_2' \longrightarrow$$

$$5\cdot 100 = 5\cdot 40 + 15υ_2' \longrightarrow 300 = 15υ_2' \longrightarrow υ_2' = 20\ m/s$$

Τα δύο σώματα μετά την κρούση εκτελούν ευθύγραμμη ομαλή κίνηση. Άρα για το σώμα M είναι $d = υ_2' \cdot Δt$ και για το σώμα m είναι $d + S = υ_1' \cdot Δt \longrightarrow υ_2' \cdot Δt + S = υ_1' \cdot Δt$

$$\longrightarrow S = (υ_1' - υ_2')Δt = (40-20)\cdot 5 = 100m$$

Άσκηση 15



Παίρνω το ΘΜΚΕ για το χρονικό διάστημα από λίγο μετά την κρούση μέχρι το συσσωμάτωμα να σταματήσει:

$$ΔK = W_{ολ} \longrightarrow K_{(τελ)} - K_{(αρχ)} = W_T \longrightarrow -\frac{1}{2}(M+m)V^2 = -T\cdot S \longrightarrow$$

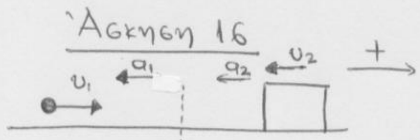
$$\longrightarrow \frac{1}{2}(M+m)V^2 = μNS \longrightarrow \frac{1}{2}\cancel{(M+m)}V^2 = μ\cancel{(M+m)}gS \longrightarrow V = \sqrt{2μgS}$$

$$\longrightarrow V = \sqrt{2\cdot 0{,}5\cdot 10\cdot 40} = 20\ m/s$$

Παίρνω για την κρούση ΑΔΟ : $P_{ολ(αρχ)} = P_{ολ(τελ)} \longrightarrow$

$$mυ = (m+M)V \longrightarrow υ = \frac{m+M}{m}V = \frac{10}{2}\cdot 20 = 100\ m/s$$

Άσκηση 16



Όπως έχουμε πει σε προηγούμενη άσκηση, πρέπει να εφαρμόσουμε την ΑΔΟ λίγο πριν και λίγο μετά την κρούση, άρα πρέπει να βρούμε την ταχύτητα των δύο σωμάτων έστω $υ_1$ και $υ_2'$ λίγο πριν την κρούση δηλαδή την $t_1 = 5s$

Είναι $|\upsilon_1'| = |\upsilon_1| - |a_1|\Delta t = 26 - 5\cdot 5 = 1\, m/s$ (επιβραδυνόμενη)

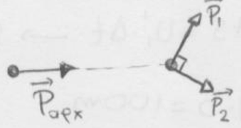
$|\upsilon_2'| = |\upsilon_2| + |a_2|\Delta t = 14 + 3\cdot 5 = 29\, m/s$ (επιταχυνόμενη)

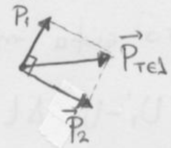
Α.Δ.Ο. $P_{ολ(αρχ)} = P_{ολ(τελ)} \longrightarrow m_1\upsilon_1' + m_2\upsilon_2' = (m_1+m_2)V \longrightarrow$

$m\upsilon_1' + 4m\upsilon_2' = (m+4m)V \longrightarrow \cancel{m}\upsilon_1' + 4\cancel{m}\upsilon_2' = 5\cancel{m}V \longrightarrow$

$$V = \frac{\upsilon_1'+4\upsilon_2'}{5} = \frac{1-4\cdot 29}{5} = -23\, m/s$$

Άσκηση 17



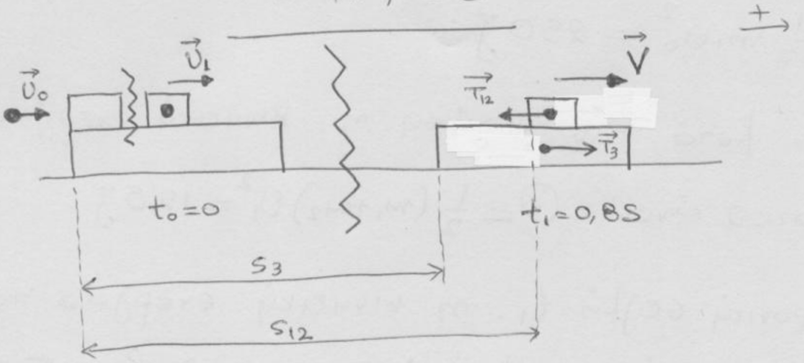


Είναι από ΑΔΟ $\vec P_{αρχ} = \vec P_{τελ} \longrightarrow |P_{αρχ}| = |P_{τελ}|$

και $|P_{τελ}| = \sqrt{|P_1|^2+|P_2|^2} = \sqrt{8^2+6^2} = 10\, kg\, m/s$

$|P_{αρχ}| = |P_{τελ}| = m|\upsilon| \longrightarrow |\upsilon| = \frac{10}{10} = 1\, m/s.$

Άσκηση 18



Προσέξτε ότι ενώ την τριβή την έχουμε συνηθίσει να επιβραδύνει ένα σώμα, εδώ επιταχύνει το σώμα m_3!

α. ΑΔΟ: $\vec{P}_{ολ(αρχ)} = \vec{P}_{ολ(τελ)} \longrightarrow m_1|υ_0| = (m_1+m_2)|υ_1| \longrightarrow |υ_1| = 5\ m/s$

εδώ η ΑΔΟ εφαρμόστηκε στην πολύ μικρή διάρκεια της κρούσης

β. Η ολική ορμή του συστήματος m_1, m_2, m_3 είναι σταθερή όχι μόνο κατά τη διάρκεια της κρούσης αλλά και μετά αφού οι τριβές $\vec{T}_{12}$ και $\vec{T}_3$ είναι εσωτερικές δυνάμεις άρα το σύστημα είναι μονωμένο. Άρα αρκεί να βρούμε την ολική ορμή όποια στιγμή θέλουμε π.χ. πριν την κρούση που είναι:

$|P_{ολ}| = m_1|υ_0| = 0{,}05 \cdot 100 = 5\ kg\,m/s$ με κατεύθυνση προς το δεξιά

γ. Στο ερώτημα β έχουμε βρεί την ολική ορμή τη στιγμή t_1.

Άρα είναι $|P_{ολ}| = (m_1+m_2+m_3)|V| \longrightarrow |V| = 1\ m/s$

δ. Είναι $T_{12} = \dfrac{\Delta P_{12}}{\Delta t} = \dfrac{(m_1+m_2)V - (m_1+m_2)υ_1}{\Delta t} = \dfrac{1-5}{0{,}8} = -5N$,

$$T_3 = \frac{\Delta P_3}{\Delta t} = \frac{m_3 V - 0}{\Delta t} = \frac{4}{0{,}8} = 5N$$

δηλαδή $\vec{T}_{12} = -\vec{T}_3$. Απολύτως λογικό αφού οι $\vec{T}_{12}$ και $\vec{T}_3$ είναι δράση – αντίδραση.

ε. Αρχικά η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι

$$K_1 = \frac{1}{2} m_1 v_0^2 = 250\,J$$

Αμέσως μετά την κρούση η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι $K_2 = \frac{1}{2}(m_1+m_2)v_1^2 = 12{,}5\,J$

Τη χρονική στιγμή t_1 η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι $K_3 = \frac{1}{2}(m_1+m_2+m_3)V^2 = 2{,}5\,J$

Άρα η θερμότητα λόγω της κρούσης είναι

$$Q_{κρ} = K_1 - K_2 = 237{,}5\,J$$

και η θερμότητα λόγω των τριβών είναι

$$Q_{τρ} = K_2 - K_3 = 10\,J$$

στ. Η επιτάχυνση του συσσωματώματος είναι:

$$a_{12} = \frac{\Delta v_{12}}{\Delta t} = \frac{1-5}{0{,}8} = -5\,m/s^2$$ και του m_3 είναι

$$a_3 = \frac{\Delta v_3}{\Delta t} = \frac{1-0}{0{,}8} = 1{,}25\,m/s^2$$

Θα μπορούσαμε να τις βρούμε και από τη σχέση $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$ για κάθε σώμα.

ζ. Τα συσσωματώματα θα διανύσει διάστημα:

$S_{12} = |v_1|\Delta t - \frac{1}{2}|a_{12}|\Delta t^2 = 2{,}4\,m$ και το m_3

$S_3 = \frac{1}{2}|a_3|\Delta t^2 = 0{,}4\,m$

Άρα το m_{12} πάνω στο m_3 θα έχει διανύσει διάστημα

$S = S_{12} - S_3 = 2\,m$

η. Το έργο της $\vec{T}_{12}$ είναι $W_{12} = -|T_{12}| \cdot S_{12} = -12 J$

Το έργο της $\vec{T}_3$ είναι $W_3 = |T_3| \cdot S_3 = 2 J$

Άρα $W_{ολ} = W_{12} + W_3 = -10 J$

Προσέξτε ότι το έργο της τριβής $\vec{T}_3$ είναι θετικό!

Ένας παρατηρητής πάνω στο m_3, δεν θα καταλάβαινε την κίνηση του m_3 και θα αισθανόταν το m_{12} να κινείται διάστημα 2m και θα υπολόγιζε $W_T = -T \cdot S = -5 \cdot 2 = -10 J$ δηλαδή το ίδιο. Λογικό αφού το $|W_T|$ μας δίνει τη θερμότητα και θα έπρεπε και οι δύο παρατηρητές να υπολογίζουν την ίδια. Δηλαδή $Q = |W_T| = 10 J$. Προσέξτε ότι το ίδιο είχατε υπολογίσει στο ερώτημα ε.